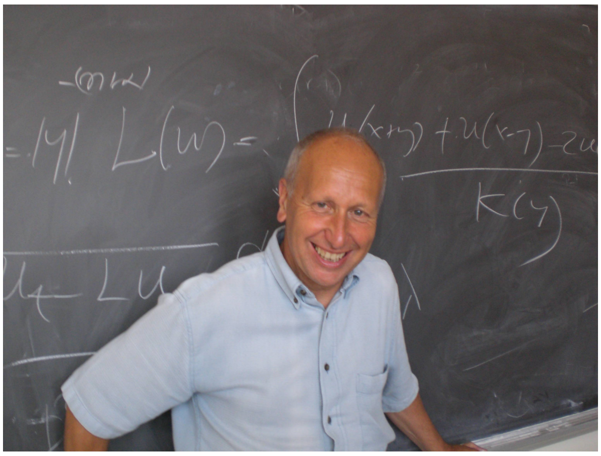
Contribucions

Premi Abel

Luis Caffarelli: Premi Abel 2023

Xavier Ros Oton (ICREA & UB),
Clara Torres Latorre (UB)



Luis Caffarelli, premi Abel 2023.

Biografia

Nascut a Buenos Aires, Argentina, Luis Caffarelli es va doctorar en matemàtiques a la Universidad de Buenos Aires l'any 1972, quan tenia encara 23 anys. En acabar la tesi li van oferir una plaça postdoctoral a la Universitat de Minnesota, on va coincidir amb Hans Lewy (premi Wolf 1986), i va començar a treballar en problemes d'equacions en derivades parcials (EDP). Va estar 10 anys a Minnesota, on va passar a ser catedràtic el 1979. Del 1980 al 1986 va ser catedràtic, primer al Courant Institut de Nova York, on va iniciar la seva col·laboració amb Louis Nirenberg (premi Abel 2015), i després a la Universitat de Chicago. Després de la seva etapa com a professor a Minnesota, Nova York i Chicago, es va convertir en membre permanent de l'Institute of Advanced Studies (IAS) de Princeton, on va passar 10 anys importants de la seva carrera. Finalment, des del 1997 fins al 2023 ha ocupat la plaça de Sid Richardson Foundation Regents Chair in Mathematics a la Universitat de Texas a Austin.

Luis Caffarelli és un dels matemàtics més reconeguts mundialment, i abans del premi Abel 2023 ja havia rebut nombrosos premis i distincions, entre els quals: la medalla Stampacchia 1982, el premi Bocher de l'AMS el 1984, la medalla d'or Pius XI de l'Acadèmia Pontifícia de les Ciències el 1988, el premi Rolf Schock el 2005, el premi Steele de l'AMS el 2009, el premi Wolf el 2012, i el premi Shaw el 2018.

Teoria de regularitat per a EDP

Les EDP són un camp d'investigació molt ampli i actiu, amb connexions importants amb altres camps com l'anàlisi harmònica i variacional, la geometria diferencial, els sistemes dinàmics, la física matemàtica, la teoria de probabilitat, o la matemàtica computacional. Una de les preguntes més bàsiques i fonamentals en l'anàlisi d'EDP és la regularitat:

Donada una certa EDP, són regulars totes les seves solucions, o poden tenir singularitats?

Aquesta pregunta està estretament relacionada amb d'altres com l'existència, unicitat i estabilitat de les solucions, i des de mitjans del segle XX ha estat (i és encara) un dels temes centrals d'investigació en EDP.

Durant més de 40 anys, Luis Caffarelli ha estat el matemàtic de referència en aquest camp, amb resultats extremadament importants i influents en diversos contextos, alguns dels quals expliquem a continuació.

Problemes de frontera lliure

Una part important dels treballs de Caffarelli estudien els anomenats problemes de frontera lliure. L'exemple més important és el problema de Stefan (1831), que descriu matemàticament les transicions de fase, com per exemple un bloc de gel desfent-se en aigua. Aquest tipus de problemes apareixen en contextos ben diferents, no només en models físics, sinó també en biologia i finances, o en problemes purament geomètrics.

En el problema de Stefan, hi ha dues incògnites:

- La temperatura de l'aigua, en funció de la posició x i del temps t.
- La *frontera lliure*: la superfície que separa l'aigua del gel.

És clar que aquestes dues incògnites estan estretament relacionades i que en necessitem entendre una per entendre l'altra. I la pregunta principal és què en podem dir de la regularitat d'aquesta superfície: podria ser un conjunt molt irregular amb perímetre infinit? O és simplement una superfície C^∞ que evoluciona en el temps?

La primera gran contribució de Caffarelli, que el va fer famós en el camp de les EDP, va ser precisament en aquest problema [4]. El seu principal resultat a [4] demostrava que la frontera lliure és C^∞ llevat d'un cert conjunt tancat de punts singulars. Aquest treball va obrir la porta a un nou camp de recerca que ell mateix va impulsar al llarg dels anys [1, 10] i que continua ben actiu.

Equació de Monge-Ampère

L'equació de Monge-Ampère és una equació no lineal en derivades parcials de la forma

$$\det(D^2u) = 1,$$

on D^2u és la matriu hessiana de $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Aquesta equació es pot entendre com una versió no lineal de l'equació de Laplace $\Delta u = 0$ —recordeu que $\Delta u := \mathrm{tr}(D^2u)$— que a part de ser invariant per translacions, rotacions i dilatacions, ho és per transformacions afins generals. El preu que cal pagar per incloure més simetries és que ara l'equació és completament no lineal.

L'equació de Monge-Ampère data del 1784, i apareix en diversos problemes de geometria diferencial (riemanniana o conforme), com per exemple en el problema de trobar superfícies amb una curvatura gaussiana donada. A més, és també d'importància central en el problema de transport òptim de Monge i Kantorovich, una àrea de recerca molt important i amb fortes connexions amb geometria i probabilitat.

En aquest context, Caffarelli va desenvolupar per primera vegada la teoria de regularitat per a solucions d'aquesta equació completament no lineal [5, 6, 7], demostrant en particular que els exemples (explícits) de solucions singulars són els únics que poden existir.

Equacions dels fluids

Probablement, el problema obert més famós i important en el camp de les EDP és la regularitat per a les equacions de Navier-Stokes, que modelen el moviment dels fluids incompressibles:

- $\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u}$,
- $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$,

on $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3$ és la velocitat del fluid, p la pressió, i $\nu > 0$ el coeficient de viscositat. La primera equació és bàsicament una aplicació de la segona llei de Newton, mentre que la segona equació diu que el fluid és incompressible.

Les equacions de Navier-Stokes van ser desenvolupades durant la primera meitat del segle XIX, i han estat àmpliament utilitzades des d'aleshores a la física i l'enginyeria. No obstant això, matemàticament queden moltes qüestions bàsiques per entendre.

Donada una velocitat inicial $\mathbf{u}_0$ qualsevol, és un problema completament obert decidir si existeix una solució $\mathbf{u}(x,t)$ de classe C^∞ que resol les equacions per tot $t > 0$. Aquesta pregunta d'existència de solucions és en el fons una pregunta de *regularitat*: com que sabem que tenim existència local (per temps petits) el que cal demostrar realment és que aquesta solució no pot crear singularitats (que alguna magnitud física esdevingui infinita) en un temps finit. La qüestió de la regularitat o formació de singularitats a les equacions de Navier-Stokes és un dels *Problemes del Mil·leni* del Clay Institute, guardonat amb un milió de dòlars.

L'any 1982, juntament amb Kohn i Nirenberg, Caffarelli va demostrar que si hi ha singularitats, aleshores el conjunt de singularitats no pot contenir cap corba en espai-temps [8]. En altres paraules, que si hi ha singularitats, aquestes desapareixen immediatament després de formar-se. Després de quatre dècades d'intensa recerca, aquest és encara el millor resultat de regularitat parcial conegut per les equacions de Navier-Stokes.

Les contribucions de Caffarelli en l'estudi de mecànica de fluids van més enllà, i vint anys més tard va demostrar per primera vegada que l'equació SQG crítica no pot crear singularitats [13]. Aquest treball està molt relacionat amb la teoria de regularitat per a equacions no locals, un camp en el qual Caffarelli i Silvestre han fet grans contribucions [11] i han tingut una influència enorme.

Relació amb Catalunya

Luis Caffarelli ha tingut un impacte important en la matemàtica catalana. En primer lloc, ha estat durant molts anys un col·laborador de Xavier Cabré [2], amb qui van escriure un llibre de referència mundial en EDP el·líptiques no lineals [3]. Aquest vincle ha fet que Luis Caffarelli hagi estat a Catalunya diverses vegades, per exemple impartint la lliçó inaugural del curs 2003/04 a la FME, una conferència plenària al congrés CEDYA a Tarragona l'any 2003, i un curs avançat a les Jornades d'Interacció entre els Sistemes Dinàmics i les EDP l'any 2011.

Per altra banda, Caffarelli va ser supervisor de postdoc de Xavier Ros Oton (UT Austin 2014-2017), i durant aquest temps van col·laborar també amb Joaquim Serra [9], introduint per primera vegada l'estudi de problemes de frontera lliure a la comunitat matemàtica catalana. Més recentment, Caffarelli ha estat el director de tesi de María Soria Carro (UT Austin 2016-2022), amb qui han treballat en temes de regularitat per a problemes de regularitat per a EDP el·líptiques [12].

Les contribucions de Luis Caffarelli a la matemàtica han estat immenses, no només pel que fa als resultats matemàtics importantíssims, sinó també per la seva influència en el desenvolupament de noves línies d'investigació i en les noves generacions d'investigadors en EDP, tant a escala mundial com a Catalunya en particular.

Luis Caffarelli va rebre el premi Abel a Oslo el 23 de març del 2023, justament el mateix dia que la SCM lliurava els premis Cangur als joves catalans.

Luis Caffarelli rebent el premi Abel 2023.

Referències

[1] I. Athanasopoulos, L. Caffarelli, S. Salsa, *Regularity of the free boundary in parabolic phase-transition problems*, Acta Math. **176** (1996), 245–282.

[2] L. Caffarelli, X. Cabré, *Interior $C^{2,\alpha}$ regularity theory for a class of nonconvex fully nonlinear elliptic equations*, J. Math. Pures Appl. **82** (2003), 573–612.

[3] L. Caffarelli, X. Cabré, *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 43. AMS, Providence, RI, 1995.

[4] L. Caffarelli, *The regularity of free boundaries in higher dimensions*, Acta Math. **139** (1977), 155–184.

[5] L. Caffarelli, *A localization property of viscosity solutions to the Monge-Ampère equation and their strict convexity* Ann. of Math. **131** (1990), 129–134.

[6] L. Caffarelli, *Interior $W^{2,p}$ estimates for solutions of the Monge-Ampère equation*, Ann. of Math. **131** (1990), 135–150.

[7] L. Caffarelli, *The regularity of mappings with a convex potential*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 99–104.

[8] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-*

Stokes equations, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 771–831.

[9] L. Caffarelli, X. Ros-Oton, J. Serra, *Obstacle problems for integro-differential operators: regularity of solutions and free boundaries*, Invent. Math. **208** (2017), 1155–1211.

[10] L. Caffarelli, S. Salsa, *A Geometric Approach to Free Boundary Problems*. Graduate Studies in Mathematics, 68. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[11] L. Caffarelli, L. Silvestre, *The Evans-Krylov theorem for nonlocal fully nonlinear equations*, Ann. of Math. **174** (2011), 1163–1187.

[12] L. Caffarelli, M. Soria-Carro, P. Stinga, *Regularity for $C^{1,\alpha}$ interface transmission problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **240** (2021), 265–294.

[13] L. Caffarelli, A. Vasseur, *Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation*, Ann. of Math. **171** (2010), 1903–1930.

Cent anys de la visita d'Einstein

Einstein i les matemàtiques

Sebastià Xambó Descamps
IMTech & BSC

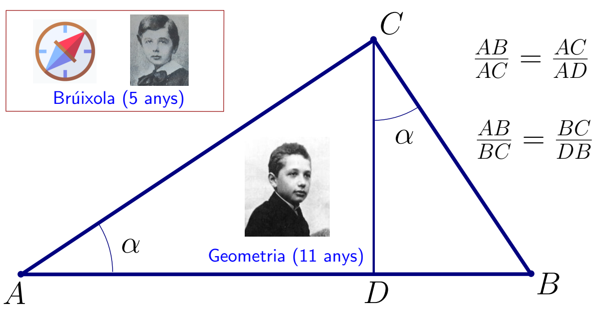
> A Joan Girbau, *in memoriam*, per la seva humanitat i el seus llargs i fructífers mestratges.

Aquest escrit es basa en la conferència que vaig impartir a l'Institut d'Estudis Catalans (IEC) el 3 de març de 2023 en l'ocasió de la inauguració de l'exposició "Einstein i l'actualitat de les seves contribucions", promoguda per Antoni Roca Rosell en commemoració de la visita d'Albert Einstein a Barcelona el febrer de 1923. També he aprofitat alguns matisos de la sessió impartida a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB) el 17 d'abril a l'assignatura "Albert Einstein i la Ciència i la Tècnica del segle XX" (4t curs del Grau d'Enginyeria Industrial de la UPC) arran de l'amable invitació de la professora responsable de l'assignatura, Maria Rosa Massa.

Si no es declara altrament, les citacions són traduccions al català de fragments de les notes autobiogràfiques d'Einstein, [1], i en aquest cas els èmfasis no estan a l'original.

Un sagrat llibre de geometria

A la seva autobiografia [1] podem llegir: "Als 12 anys vaig viure una segona meravella d'una naturalesa totalment diferent [la primera, als 5 anys, fou l'encís que li produí una brúixola]: un petit llibre de geometria plana euclidiana que va arribar a les meves mans a principis del curs escolar. Afirmacions no evidents, com per exemple que les tres altures d'un triangle es tallen en un punt, es podien demostrar amb tanta certesa que qualsevol dubte semblava fora de qüestió. *Aquesta lucidesa i certesa em van causar una impressió indescriptible.*" I tot seguit recorda que "un oncle [Jacob Einstein] em va explicar el teorema de Pitàgores [i la demostració d'Euclides, que trobà complicada] abans d'obtenir *aquell sagrat llibret de geometria*. Després de molt d'esforç vaig aconseguir provar aquest teorema sobre la base de la semblança dels triangles." Els estudiosos consideren que es tracta de la demostració [coneguda, però nova per a ell] basada en la semblança del triangle ABC amb els triangles ACD i CBD de la Figura 1, [2].



$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB^2$$

Figura 1. Dues fascinacions cognitives d'infantesa

"Des dels dotze als setze anys em vaig familiaritzar amb els elements de les matemàtiques juntament amb els principis del *càlcul diferen-*